SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Mapa kursa

Modelovanje

Klasifikacija sistema
Diferencijalne jednačine
Funkcija prenosa
- Polovi, nule, pojačanje
- Strukturni blok dijagrami
- Graf toka signala

Model u prostoru stanja
- Kanonične forme
- Linearizacija
- Rješavanje jednačina stanja

Analiza

Kontrolabilnost i opservabilnost
Stabilnost sistema
- Raus
- Nikvist

Performanse SAU-a
- Stacionarno stanje
- Prelazni proces
- Kompleksni domen

Frekvencijske karakteristike
- Bodeovi dijagrami

Dizajn

Specifikacije sistema
Kompenzatori
- Pojačavač
- Integralni kompenzator
- Diferencijalni kompenzator
- Diferencijalno - integralni kompenzator

PID regulator
Fizičke realizacije
Diskretizacija kontinualnih regulatora

Predavanje 8

Performanse SAU-a: analiza tranzijenta

Ishodi učenja:

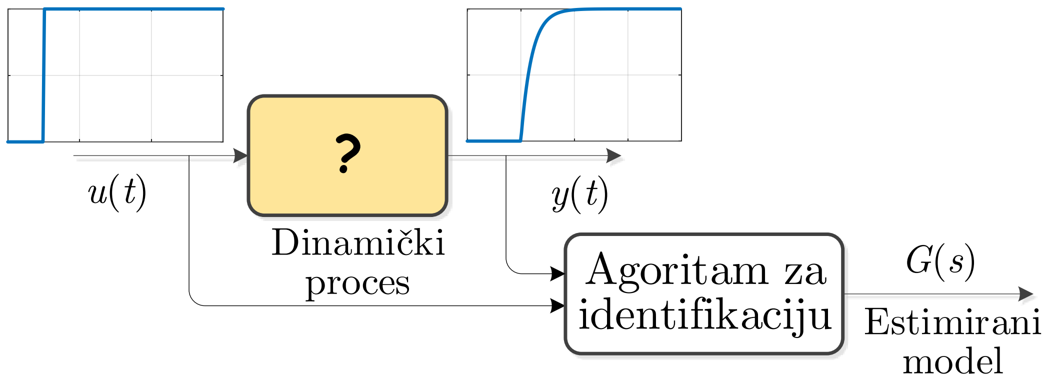
Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu najznačajnije karakteristične veličine prelaznog procesa kod sistema prvog i drugog reda
- Prepoznaju vezu između položaja polova u s-ravni i karakterističnih veličina tranzijentog režima kod sistema drugog reda
- Aproksimiraju sistem većeg reda sistemom drugog reda i prepoznaju uslove pod kojima je to moguće odraditi

Zašto izučavamo prelazne procese?

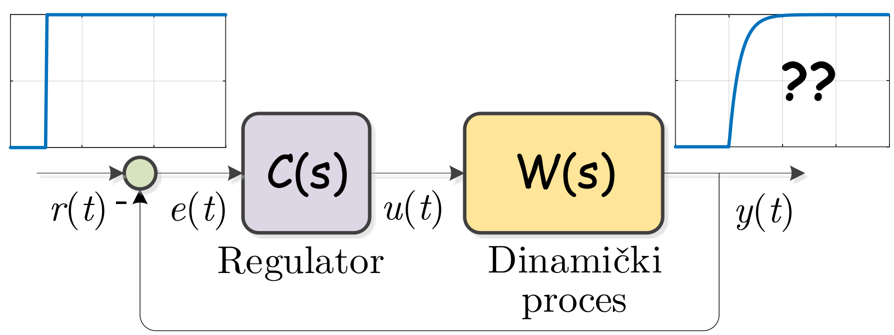
Modelovanje:

- Neki parametri sistema mogu biti estimirani i identifikovani na osnovu vremenskog odziva.



Analiza:

- Evaluacija prelaznog procesa da bi vidjeli da li SAU-a zadovoljava zahtjevane performanse

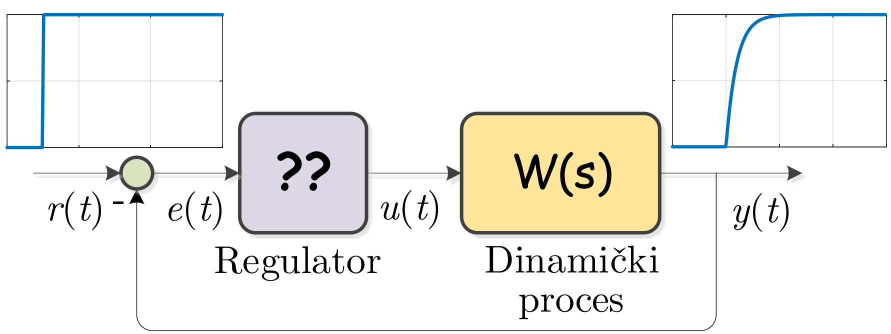


Zašto izučavamo prelazne procese?

Dizajn

- Prilikom dizajna regulatora vrši se specifikacija željenih performansi sistema u prelaznom i stacionarnom režimu. Parametre regulatora treba podesiti tako da se obezbijede željene performanse.

  Zahtjevi za željenim performansama u stacionarnom stanju se zadaju u vidu željene vrijednosti signala greške ili u vidu željene vrijednosti konstante greške. U okviru današnjeg predavanja biće rađeni pokazatelji performansi prelaznog procesa i njihova veza sa položajem polova u s-ravni.



Sistemi prvog reda

Najprije razmotrimo sisteme prvog reda koji nemaju nula. Funkcija prenosa sistema je:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}.$$

Fizički ovom funkcijom prenosa se može modelovati RC kolo, sistem masa-prigušnica, temperatura u prostoriji, protok tečnosti u rezervoaru, pritisak u cijevi, itd.

Step odziv sistema je jednak:

$$y(s) = \frac{1}{s}\frac{a}{as+1} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s+a},$$

Odnosno, u vremenskom domenu:

$$y(t) = 1 - e^{-at} = 1 - e^{-\frac{1}{1/a}t} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

```
syms s a
G=a/(s+a)
ilaplace(1/s*G)
ans =
1 - exp(-a*t)
```

Sistemi prvog reda

Može se uočiti da prelazni režim zavisi samo od parametra a, odnosno od pola sistema:

Stacionarno stanje

Prelazni proces

$$y(t) = 1 - e^{-at} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Kada je parametar a pozitivan, odnosno kada pol leži u lijevoj poluravni, prelazni proces iščezava. Konstanta $\tau = 1/a$ se zove vremenska konstanta sistema, zato što ona nosi informaciju o karakteristikama prelaznog režima.

Vremenska konstanta se definiše kao vrijeme koje je potrebno da prelazni proces opadne za 37%. Ili, to je vrijeme koje je potrebno da step odziv dostigne 63% od vrijednosti u stacionarnom stanju:

$$y(t = \tau) = 1 - e^{-a\tau} = 1 - e^{-1} = 0.63.$$

Sistemi prvog reda

Pored vremenske konstante, za sisteme prvog reda se definišu još dvije karakteristične veličine: vrijeme uspona i vrijeme smirenja.

Vrijeme uspona (T_u) je vrijeme koje protekne od trenutka kada odziv dostigne 10% vrijednosti u stacionarnom stanju, do trenutka kada odziv dostigne 90% vrijednosti u stacionarnom stanju. Primjenjujući ovu definiciju na izraz za vremenski odziv procesa prvog reda, dobija se da je vrijeme uspona jednako:

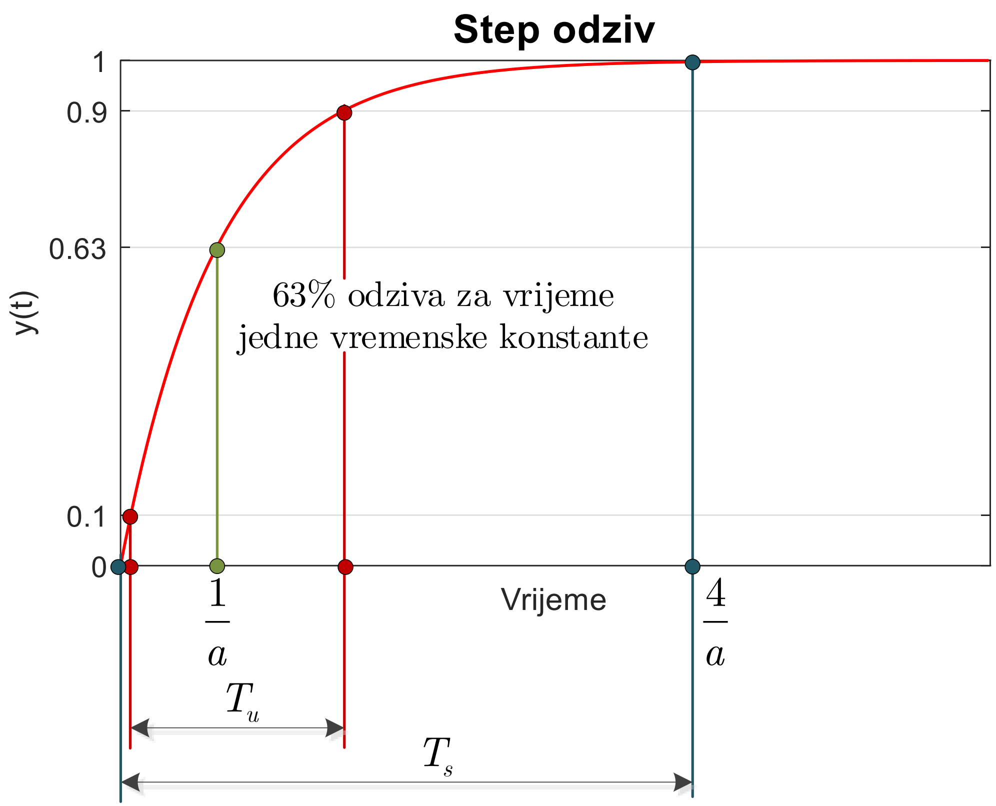
$$T_u = \frac{2.2}{a}.$$

Vrijeme smirenja (T_s) se definiše kao vrijeme koje je potrebno da amplituda odziva opadne na vrijednost manju od 2% od vrijednosti odziva u stacionarnom stanju. Uvrštavajući vrijednost 0.98 u izraz za odziv sistema, dobija se da je vrijeme smirenja:

$$T_s = \frac{4}{a} = 4\tau.$$

Sistemi prvog reda

Na slici je prikazan step odziv sistema i karakteristične vremenske veličine. Kako je statičko pojačanje sistema u razmatranom primjeru jedinično, odziv konvergira ka jedinici. Treba naglasiti da karakteristične veličine ne zavise od vrijednosti pojačanja.



Primjer – identifikacija sistema

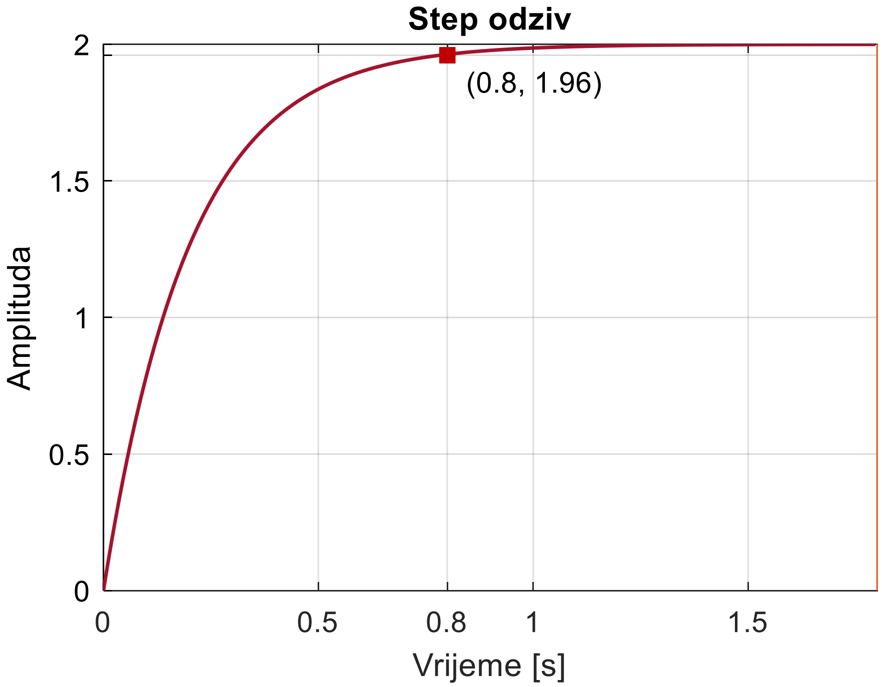
U laboratoriji je snimljen jedinični step odziv sistema i prikazan na slici ispod. Odredite parametre procesa, ako je poznato da se on može modelovati funkcijom prenosa prvog reda.

Pošto se radi o procesu prvog reda, to znači da funkcija prenosa ima oblik:

$$G(s) = \frac{K}{s+a}.$$

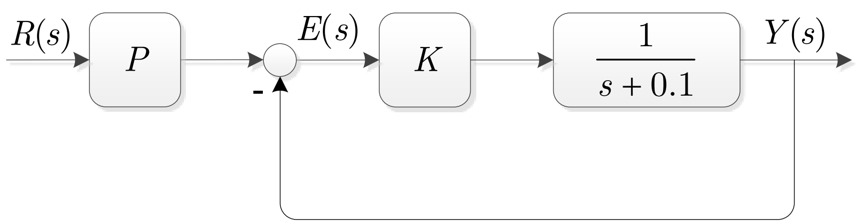
Sa grafika se može uočiti da step odziv konvergira ka vrijednosti 2, što znači da je statičko pojačanje sistema jednako 2. Slijedi da je $K/a=2$. Step odziv dostiže 98% stacionarnog stanja (1.96) u trenutku 0.8 sec, odakle slijedi da parametar a ima vrijednost $a = 4/T_s=4/0.8 = 5$. Dalje, vrijednost parametra K je jednaka:

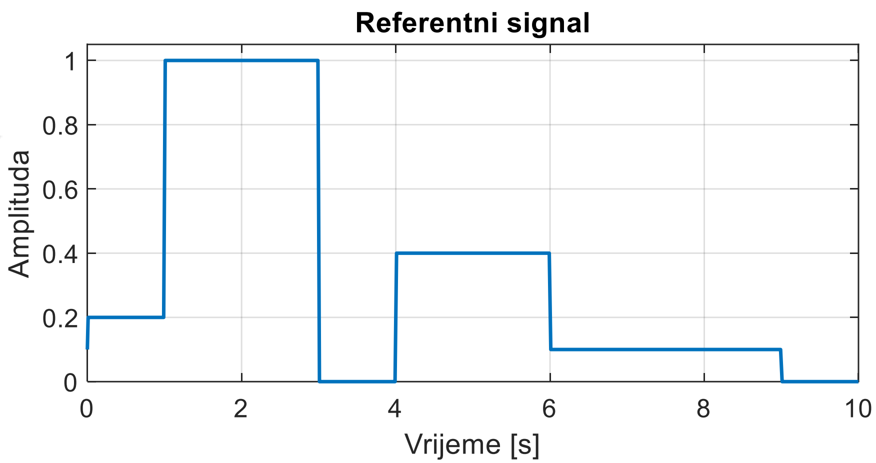
$$K=2a=5\times2=10.$$



Primjer – praćenje reference

SAU je prikazan blok dijagramom. Odrediti pojačanja K i P, tako da sistem može da prati referentni signal prikazan na slici.





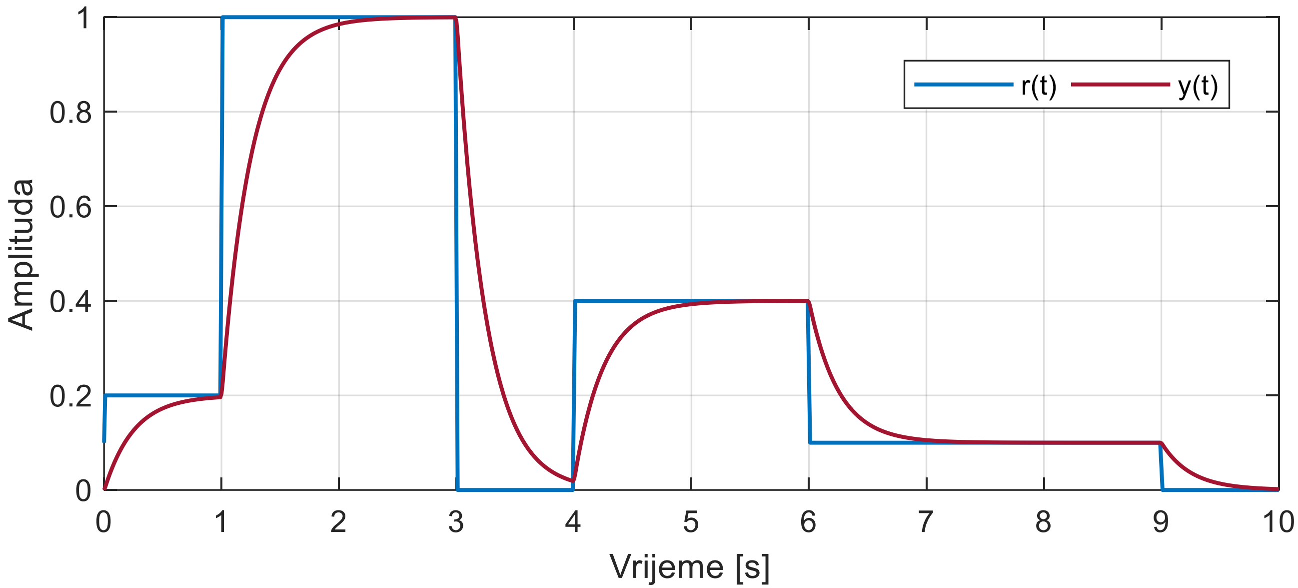
Sa grafika vidimo da se signal skokovito mijenja. Da bi sistem mogao da prati referentni signal, vrijeme smirenja mora biti manje bar od 1s (jer sistem ima na raspolaganju 1s da dostigne vrijednosti 0.2 i 0). Funkcija spregnutog prenosa je:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{PK}{s + K + 1/10}$$

Iz uslova da je vrijeme smirenja jednako 1 sec, dobija se da je K=3.9. Kako pojačanje sistema treba da bude jedinično, dobija se da je P=1.0256

Primjer – praćenje reference

Na slici je prikazan odziv sistema za zadati referentni signal. Može se uočiti da izlazni signal uspijeva da isprati referentni signal.




```
>> t=0:0.01:10
>> r=0.2*heaviside(t)+0.8*heaviside(t-1)-heaviside(t-3)...
+0.4*heaviside(t-4)-0.3*heaviside(t-6)-0.1*heaviside(t-9)
>> s=tf('s');
>> W=3.9/(s+0.1)
>> G=4/3.9*feedback(W,1)
>> lsim(G,r,t)
```

Sistemi drugog reda

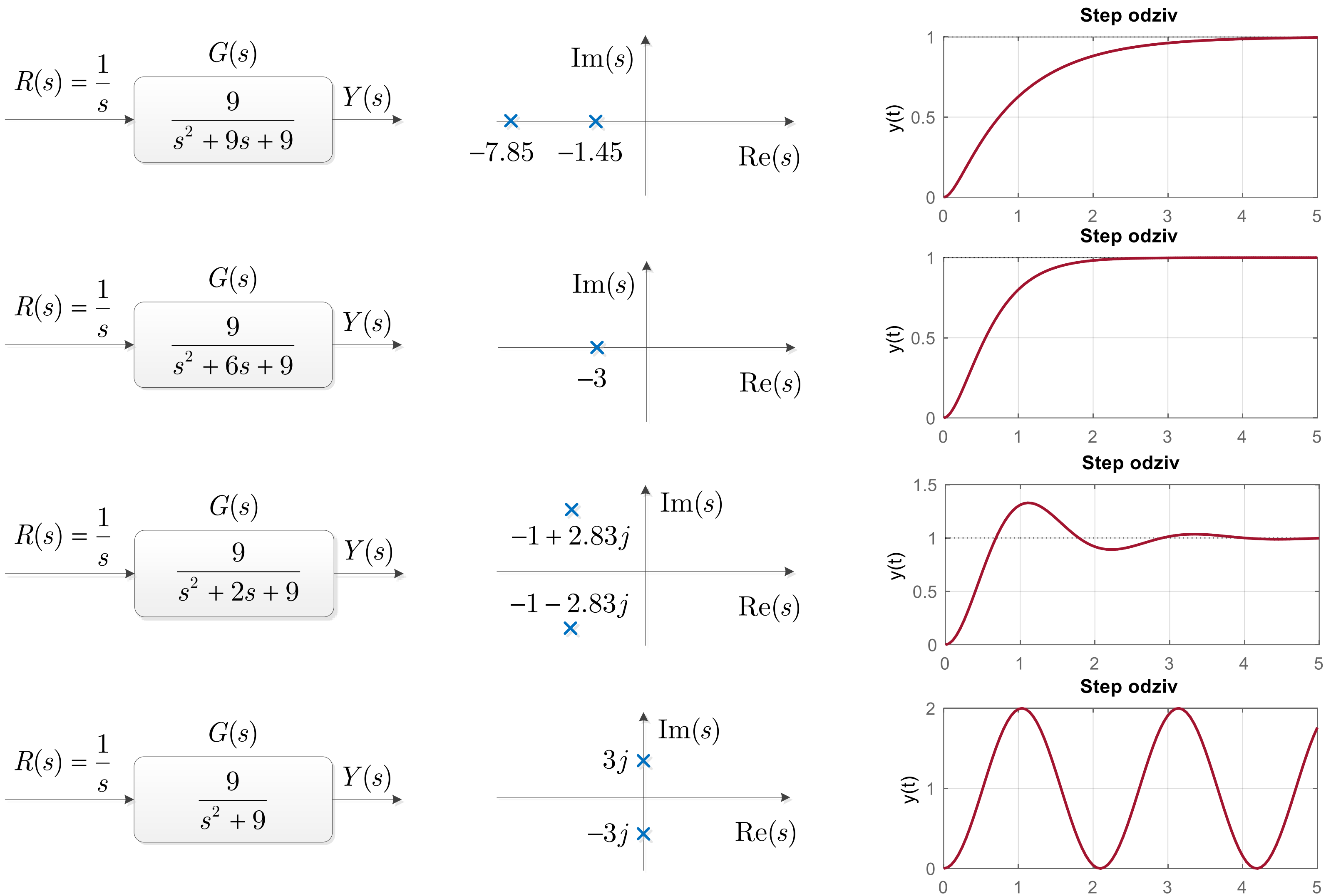
Sada ćemo analizu prelaznog procesa proširiti na sisteme drugog reda, koji imaju dva pola i nemaju nula:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Za razliku od sistema prvog reda kod kojih promjena parametra a utiče samo na brzinu odziva, ali ne i na njegov oblik, kod sistema drugog reda promjena parametara a i b utiče i na samu prirodu odziva. Naš zadatak je da definišemo pojmove i veličine kojima se može okarakterisati odziv sistema drugog reda, na sličan način kao što je odrađeno za sistem prvog reda. Prije toga, na narednom slajdu biće prikazani različiti oblici step odziva kod sistema drugog reda, za razne parametre a i b.

U sisteme drugog reda spadaju RLC kolo, sistem masa opruga prigušnica, klatno, itd.

Sistemi drugog reda



Sistemi drugog reda

Posmatrajmo funkciju prenosa:

Pretpostavimo da je negativno

$$G(s)=\frac{b}{s^2+as+b} \text{ i njene polove } s_{1,2}=-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\sigma\pm j\omega.$$

Prirodna neprigušena učestanost (ω_n) se definiše kao frekvencija kojom bi sistem oscilovao ukoliko ne bi bio prigušen, odnosno kada je a=0. Rješavanjem jednačine

$$(j\omega_n)^2+b=-\omega_n^2+b,$$

dobija se da je $\omega_n=\pm\sqrt{b}$. Faktor relativnog prigušenja se definiše kao odnos σ (za kompleksni slučaj) i prirodne neprigušene učestanosti:

$$\zeta=\frac{\sigma}{\omega_n}=\frac{a/2}{\sqrt{b}},$$

i on nosi informaciju o tome koliko su prirodne ocilacije prigušene.

Sistemi drugog reda

Ako se a i b izraze preko prethodno definisanih veličina i uvrste u $G(s)$, dobija se:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Polovi sistema su jednaki:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

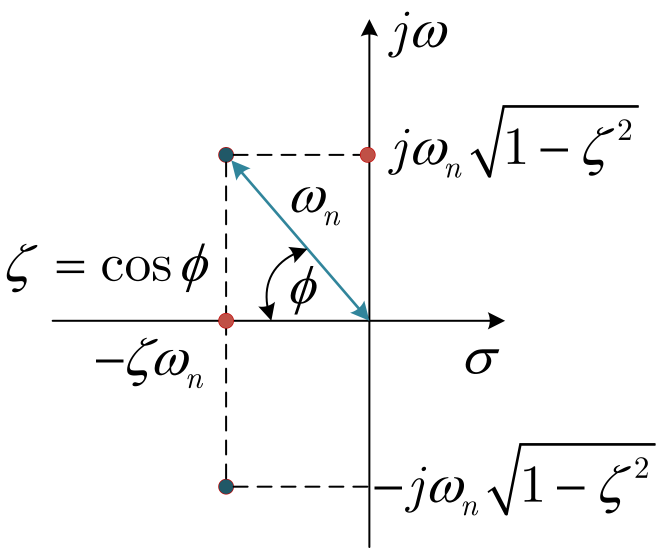
Sistemi drugog reda se mogu klasifikovati u zavisnosti od parametra ζ, odnosno od oblika odziva. Kada je ζ=0, polovi su čisto imaginarni i tada sistem osciluje sa prirodnom frekvencijom ω_n. Za ovakav sistem kažemo da je neprigušen. Kada ζ ima vrijednost između 0 i 1, polovi sistema su kompleksni:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Ovakvi sistemi se nazivaju prigušenim, jer njihov prelazni proces ima oblik prigušenih oscilacija.

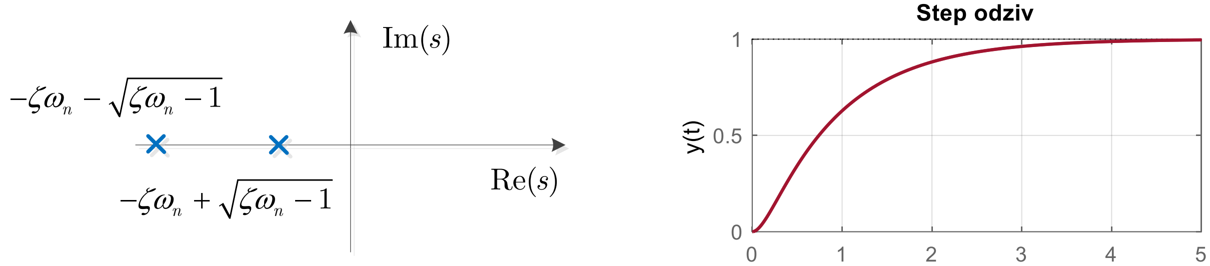
Sistemi drugog reda

Za ζ=1, sistem ima dvostruki realni pol. Ovakav sistem se zove kritično prigušenim i često je najpoželjniji slučaj u praksi. Konačno, za ζ>1 sistem ima realne i različite polove. Ovaj sistem se zove previše prigušenim, jer ima najsporiji odziv i najveće vrijeme smirenja. Napomenimo još da je kod nestabilnih sistema faktor relativnog prigušenja negativan.

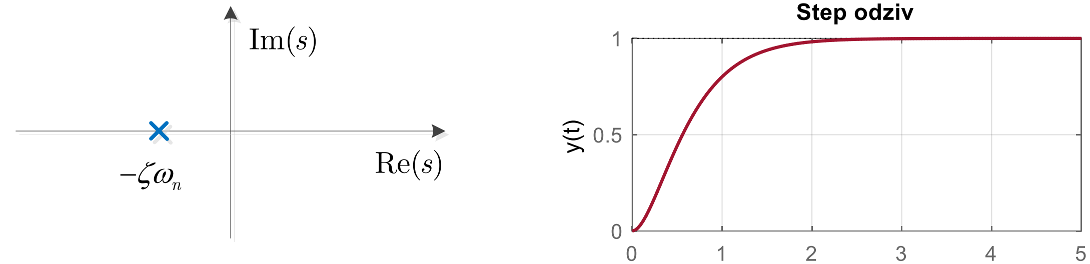


Kod prugušenih sistema parametri ζ i ω_n imaju i geometrijsku interpretaciju. Parametar ω_n predstavlja najkraću udaljenost pola od koordinatnog početka, dok je ζ jednako kosinusu ugla koji zaklapa prava koja prolazi kroz pol i koordinatni početak sa negativnim dijelom realne ose. Drugim riječima, sa ζ i ω_n je definisan položaj polova u polarnom koordinatnom sistemu.

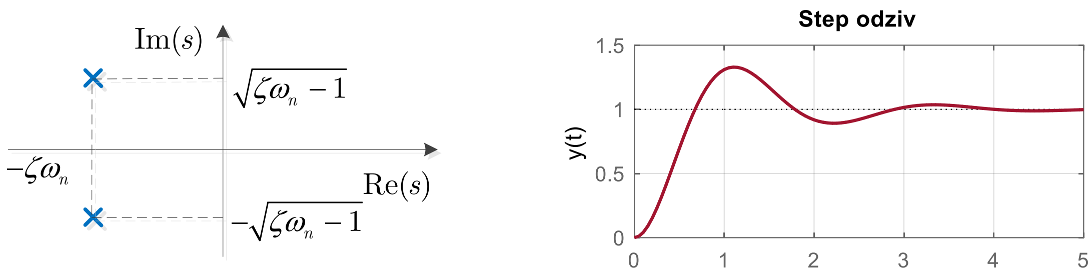
Zavisnost oblika odziva od ζ



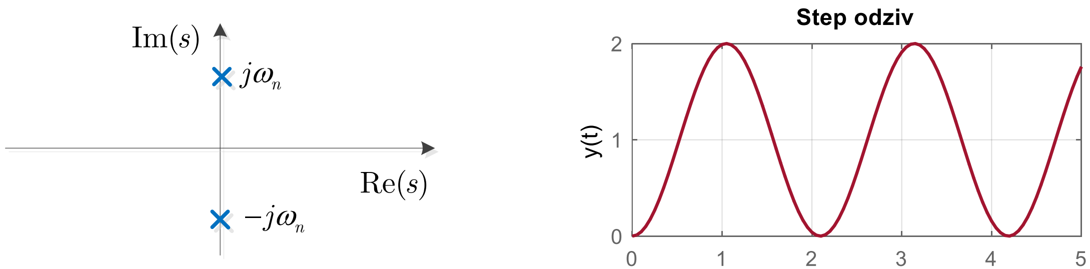
$\zeta > 1$



$\zeta = 1$



$0 < \zeta < 1$



$\zeta = 0$

Prigušeni sistemi drugog reda

Sada ćemo posmatrati prigušeni sistem drugog reda, odnosno slučaj kada je $0<\zeta<1$. Step odziv ovog sistema ima oblik:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{(s+\zeta\omega_n) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(\sqrt{1-\zeta^2})}.$$

Dalje, primjenom tablica Laplasove transformacije dobija se odziv sistema u vremenskom domenu:

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$$

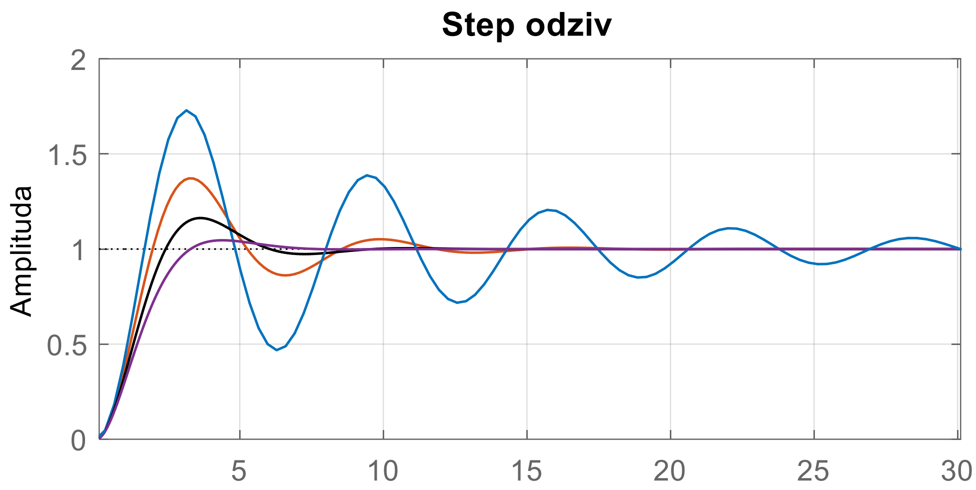
Stacionarno stanje

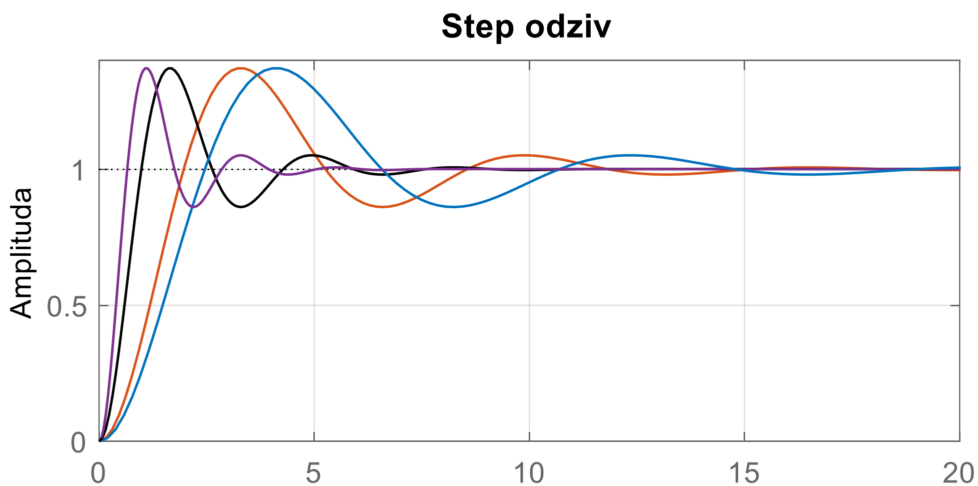
$$= 1 - \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi\right)}.$$

Prelazni proces

Prigušeni odziv drugog reda

Na slikama je prikazan odziv sistema drugog reda. Na prvoj slici je ω_n fiksno, dok je ζ promjenljivo. Na drugoj slici ζ fiksno, a ω_n promjenljivo. Može se uočiti da ove veličine utiču na vrijeme smirenja, vrijeme uspona, periodu i amplitudu oscilacija. Cilj je definisati karakteristične veličine prigušenog sistema drugog reda i njihovu zavisnost od položaja polova u s-ravni, odnosno od parametra ζ, ω_n, σ i ω.





Vrijeme smirenja

Karakteristične veličine sa sisteme drugog reda se definišu na sličan način kao kod sistema prvog reda. Vrijeme smirenja je najkraće vrijeme za koje odziv sistema uđe u opseg $y(\infty) \pm 2\%$ i više ne izlazi iz njega. Vrijeme smirenja se aproksimativno nalazi iz uslova da amplituda prelaznog procesa bude jednaka 0.02:

$$e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02,$$

odakle slijedi da je vrijeme smirenja jednako:

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}.$$

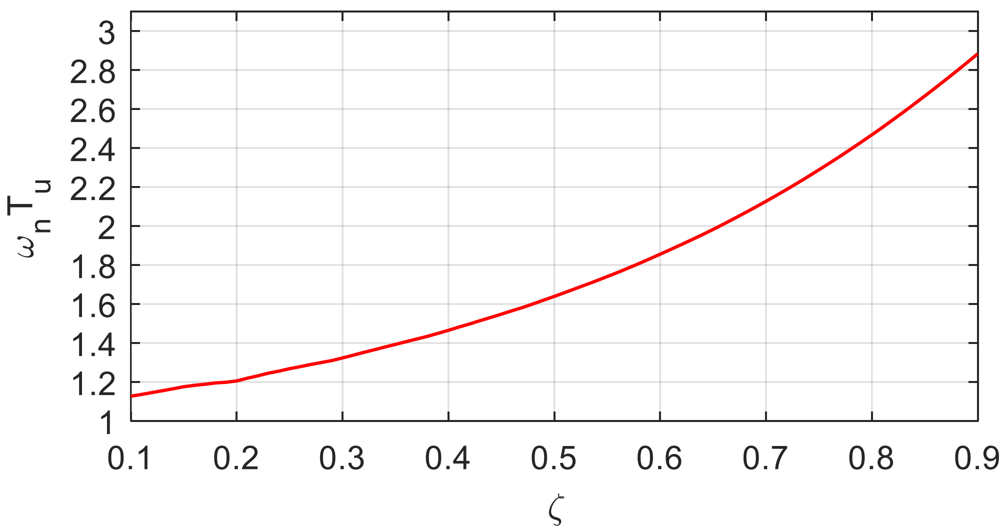
Lako se može pokazati da brojilac gornjeg izraza varira u opsegu od 3.91 do 4.74 za $\zeta \in (0,0.9)$, pa se vrijeme smirenja može aproksimirati sa:

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma}.$$

Vrijeme uspona

Vrijeme uspona je ono vrijeme koje protekne od trenutka kada sistem dostigne 10% vrijednosti u stacionarnom stanju, pa do trenutka kada sistem dostigne 90% te vrijednosti. Precizan analitički izraz za vrijeme uspona se ne može naći.

Računarskim simulacijama se može dobiti normalizovana zavisnost vremena uspona od faktora relativnog prigušenja. Vrijeme uspona je obrnuto proporcionalno ω_n i direktno proporcionalno ζ.



Kraće vrijeme uspona ukoliko se polovi nalaze „lijevlje“ i visočije u *s*-ravni

$T_u\omega_n$	ζ
0.1	1.127
0.2	1.205
0.3	1.324
0.4	1.465
0.5	1.639
0.6	1.856
0.7	2.127
0.8	2.468
0.9	2.883

za $0.1 \le \zeta \le 0.8$

$$T_u = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n}$$

Vrijeme prvog maksimuma

Kako se kod sistema drugog reda mogu javiti oscilacije, potrebno je definisati veličine koje će ih okarektirisati. Jedan parametar je vrijeme prvog maksimuma, koje, kao što mu i ime kaže, predstavlja onaj vremenski trenutak u kom se pojavljuje prvi maksimum. Vrijeme prvog maksimuma (eng. peak time) se može naći diferenciranjem odziva sistema, iz čega se dobija da je:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Perioda prigušenih oscilacija je jednaka dvostrukoj vrijednosti vremena prvog maksimuma:

$$T_\pi = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Što se polovi sistema nalaze visočije u s-ravni, to će perioda prigušenih oscilacija biti manja.

Preskok

Preskok se definiše kao:

$$\Pi = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%$$

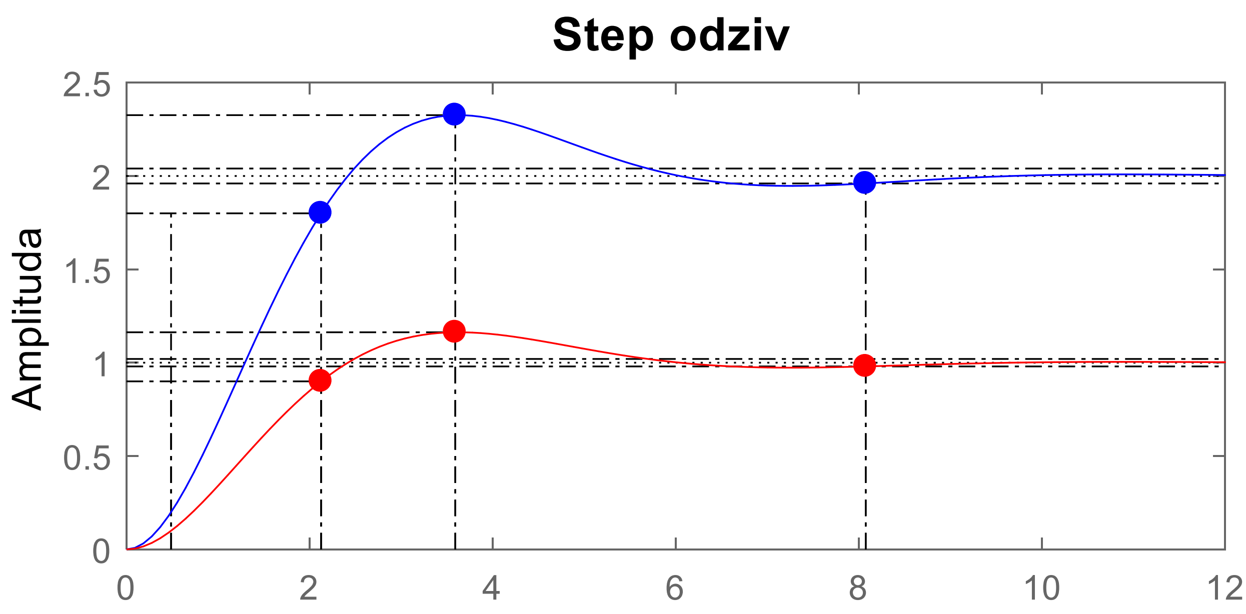
gdje je y_{max} maksimalna vrijednost odziva, a $y(\infty)$ vrijednost odziva u stacionarnom stanju. Pokazuje se da preskok zavisi samo od faktora relativnog prigušenja:

$$\Pi = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\%.$$

Prilikom projektovanja sistema cilj je da preskok bude što je moguće manji, jer je on indikator velikih i neželjenih, iako prigušenih, oscilacija u sistemu. Takođe, veći preskok ima za posljedicu i veću brzinu sistema, što je dobra osobina, tako da se prilikom projektovanja sistema upravljanja mora tražiti kompromis između ova dva opozitna zahtjeva.

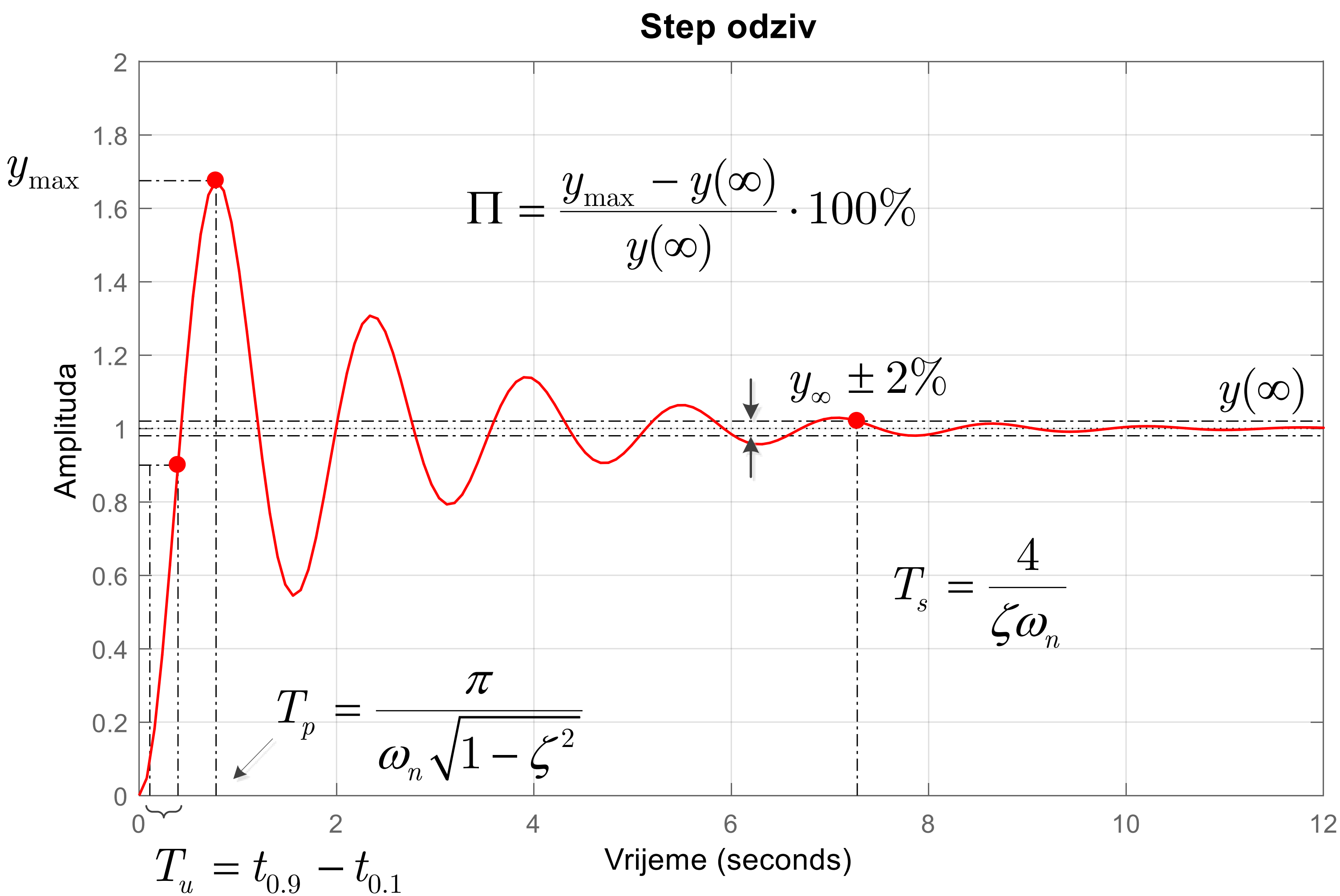
Karakteristične veličine

Bitno je naglasiti da karakteristične veličine ne zavise od pojačanja sistema, već samo od položaja polova. Prilikom izvođenja izraza za karakteristične veličine, bez gubljenja na opštosti, usvojeno je jedinično pojačanje iz razloga što se dobijaju jednostavniji izrazi za analizu.



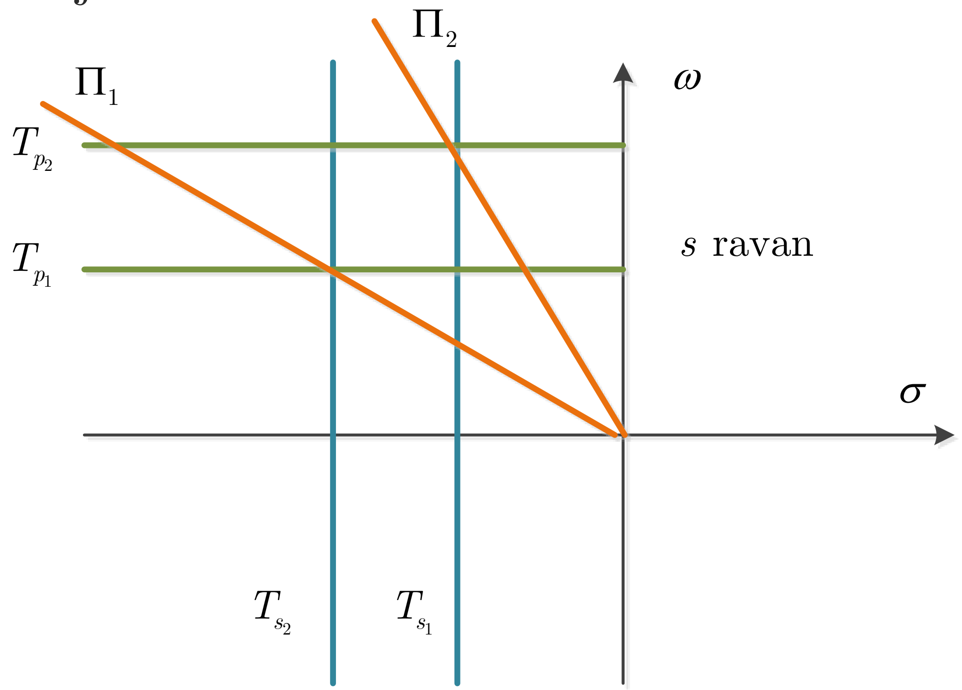

```
s=tf('s');
G=1/(s^2+s+1);
step(G,'r')
hold on
step(2*G,'b')
```

Karakteristične veličine

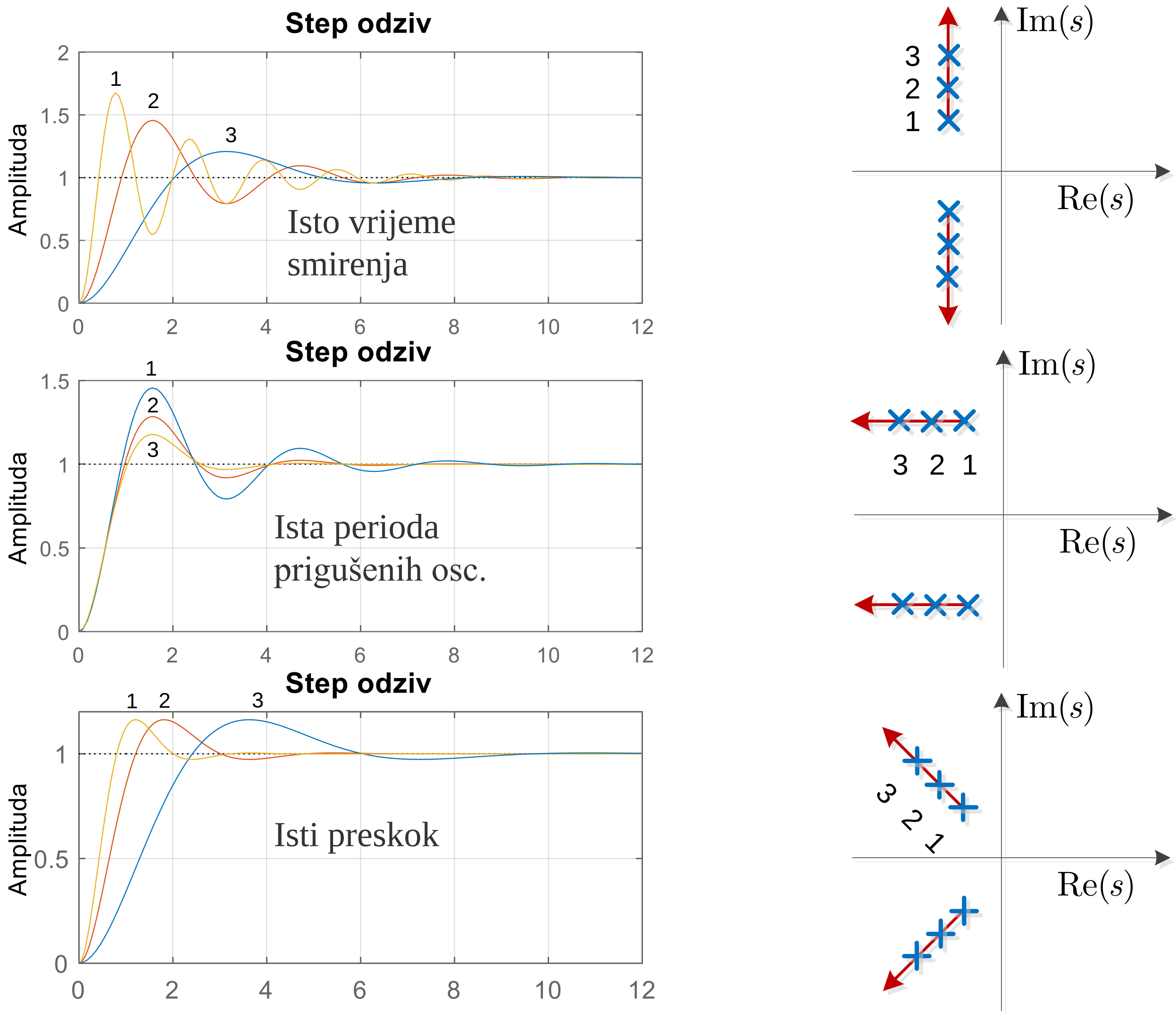


Karakteristične veličine

Na slici su prikazane krive prave istog preskoka, vremena smirenja i periode prigušenih oscilacija. Sistemi drugog reda koji imaju polove na pravoj Π_1 imaju isti preskok i on je manji nego kod sistema drugog reda koji imaju polove na pravoj Π_2. Sistemi čiji polovi imaju veći imaginarni dio imaju kraću periodu prigušenih oscilacija (i vrijeme prvog maksimuma), dok sistemi čiji se polovi nalaze lijevlje u s-ravni imaju kraće vrijeme smirenja.

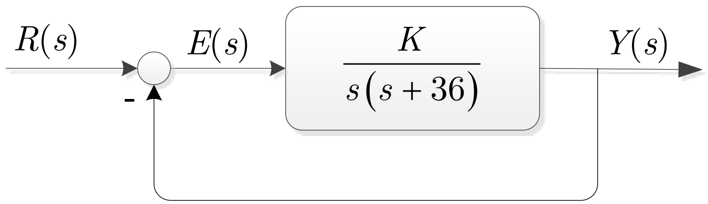


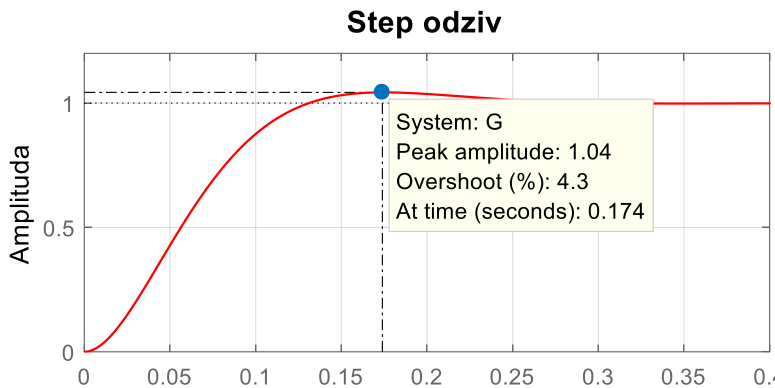
Karakteristične veličine



Primjer 1

Odrediti vrijednost parametra K tako da preskok bude 4.3%.





Iz uslova za preskok dobija se željena vrijednost faktora prigušenja:

$$\Pi = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100\% = 4.3\% \quad \rightarrow \quad \zeta = 0.7077.$$

Funkcija spregnutog prenosa je:

$$G = \frac{K}{s^2 + 36s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

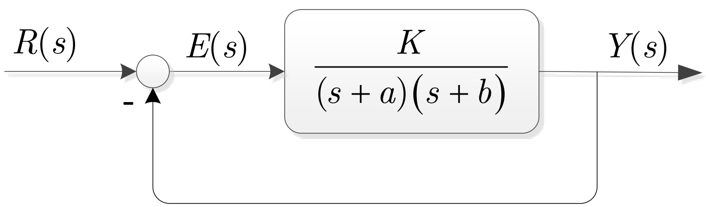
$$2\zeta\omega_n = 36 \;\Rightarrow\; \omega_n = 18 / 0.7077 = 25.4345$$

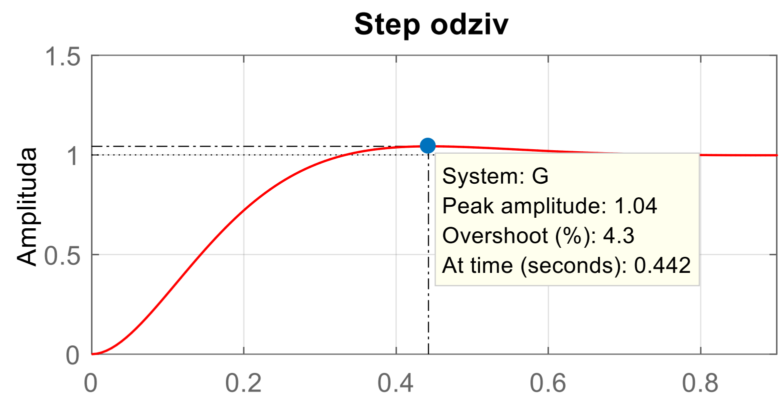
$$K = 25.4345^2 = 646.9141$$

```
>> syms s k z
>> zeta=eval(solve(exp(-
z*pi/sqrt(1-z^2))-0.043))
zeta =
   -0.7077
    0.7077
>> W=k/s/(s+36)
>> G=simplify(W/(1+W));
>> s=tf('s');
>> W=646.9141/s/(s+36)
>> G=feedback(W,1); >> step(G)
```

Primjer 2

Odrediti vrijednost parametra a i b tako da preskok bude jednak 4.3%, a greška u stacionarnom stanju 0, ako je ulazni signal jedinična step funkcija.





Iz uslova da greška u praćenju step signala bude jednaka 0, jasno da je jedan od parametra a i b treba usvojiti da bude jednak nuli. Drugi parametar se određuje iz uslova da je preskok jednak 4.3%, odnosno da je $\zeta = 0.7077$. Usvajajući da je a=0, funkcija povratnog prenosa je:

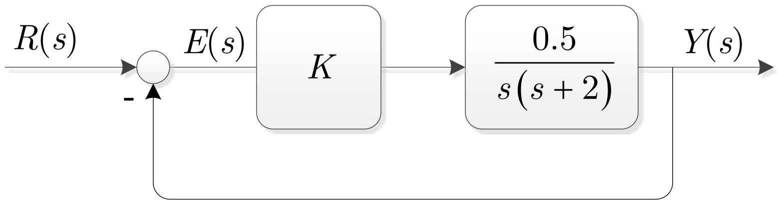
$$G = \frac{100}{s^2 + bs + 100} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\rightarrow \; b = 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.7077 \times 10 = 14.154$$

```
>> syms s b
>> W=100/s/(s+b)
>> G=simplify(W/(1+W))
G = 100/(s^2 + b*s + 100)
>> s=tf('s');
>> W=100/s/(s+14.154)
>> G=feedback(W,1);
>> step(G)
```

Primjer 3

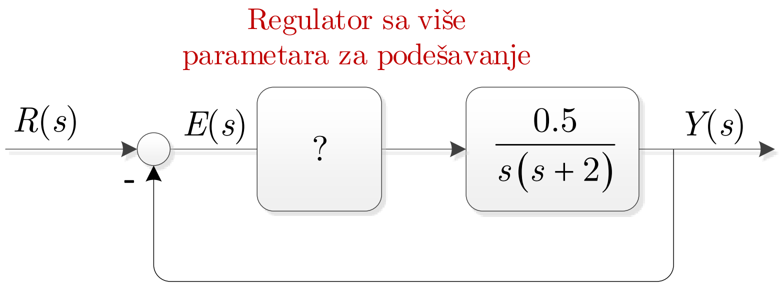
Servo sistem za upravljanje pozicijom je dat blok dijagramom na slici ispod. Izabrati pojačanje K tako da se postigne maksimalna brzina pozicioniranja bez preskoka.

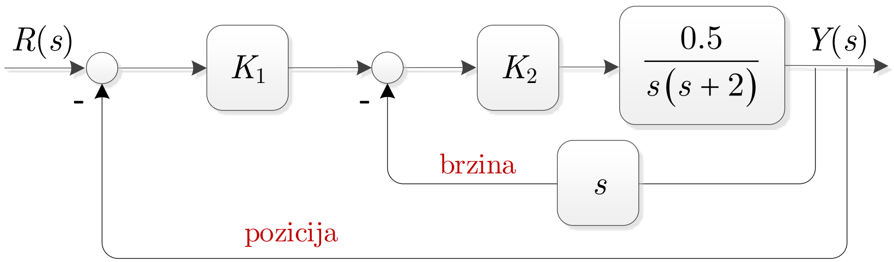


Da bi odziv bio bez preskoka, faktor prigušenja treba da bude jednak jedinici. Iz karakteristične jednačine:

$$f(s) = s^2 + 2s + 0.5K,$$

se dobija da je K=2. Za K=2 sistem ima dvostruki pol -1, pa je vrijeme smirenja približno jednako 4s. Da bi postigli manje vrijeme smirenja mora se koristiti brži motor ili regulator sa više stepeni slobode. Takođe je moguće koristiti više senzora.





Uticaj dodatnih polova

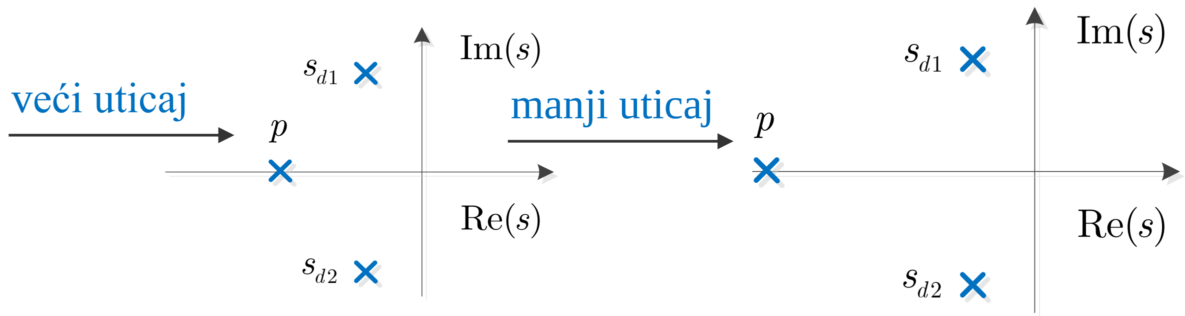
Izvedene formule za karakteristične veličine važe za sisteme drugog reda. Ukoliko sistem ima dodatne polove i nule, pod određenim uslovima sistem se može aproksimirati sistemom drugog reda koji ima samo kompleksne polove. Konjugovano kompleksni polovi sistema $s_{d1,2}$ koji su najbliži imaginarnoj osi često se nazivaju dominantnim polovima, jer imaju najveći uticaj na odziv sistema.

Posmatrajmo specijalni slučaj kad sistem ima tri pola: dva konjugovano kompleksna $s_{d1,2}$ i jedan realni pol p.

$$G(s) = \frac{b^2}{(s+p)(s^2+as+b^2)} = \frac{b^2}{(s+p)(s+s_{d1})(s+s_{d2})}$$

U literaturi se usvaja pravilo da se posmatrani sistem trećeg reda može aproksimirati sistemom drugog reda ukoliko je realni pol bar 5 puta više udaljen od imaginarne ose s-ravni u odnosu na realni dio kompleksnih polova.

Uticaj dodatnih polova



Prilikom aproksimacije sistema trećeg reda sistemom drugog reda, potrebno je obezbijediti da pojačanja početnog i aproksimiranog sistema budu jednaka:

$$G(s) = \frac{K}{(s+\sigma_3)(s^2+as+b^2)} = \frac{K}{(s+\sigma_3)(s+s_{d1})(s+s_{d2})}$$

$$G_a(s) = \frac{K_s}{(s/s_{d_1}-1)(s/s_{d_2}-1)}$$

$$K_s = \lim_{s\to 0} G(s) \text{ - pojačanje sistema}$$

Primjer – dominantni polovi

Funkcija povratnog prenosa sistema je:

$$\text{a)}\; W(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \qquad \text{b)}\; W(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Da li je opravdano spregnuti sistem aproksimirati sistemom drugog reda?

Funkcije spregnutog sistema za oba slučaja su:

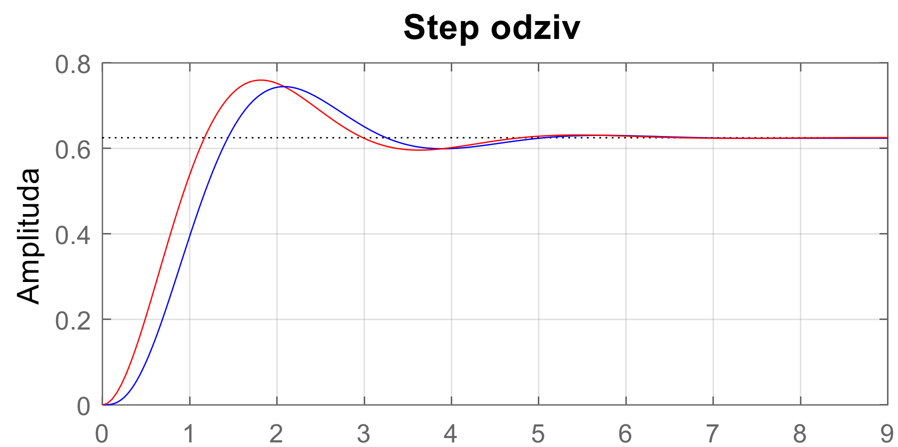
$$G_1(s) = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 11} \quad \text{i} \quad G_2(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 16}.$$

Polovi sistema G_1 su -3.9042, -1.0479 $\pm$ 1.3112i. Kako je odnos realnog pola i realnog dijela dominantnih polova jednak 3.725, u ovom slučaju nije opravdano koristiti aproksimaciju drugog reda. Sa druge strane polovi sistema G_2 su -4.3089, -0.8455 $\pm$ 1.7316i. U ovom primjeru je odnos realnog pola i realnog dijela dominantih polova 5.1, pa se ovaj sistem može grubo aproksimirati sistemom drugog reda.

Primjer – dominantni polovi

Pojačanje sistema G_2 je 10/16, dok su dominantni polovi jednaki -0.8455 $\pm$ i1.7316. Funkcija prenosa sistema drugog reda je jednaka:

$$G_{2a}(s) = \frac{K_s}{(-s/s_{d_1}+1)(-s/s_{d_2}+1)} = \frac{2.321}{s^2+1.691s+3.713}$$



Na slici je prikazan step odziv početnog i aproksimiranog sistema. Može se uočiti da oba sistema konvergiraju ka istoj vrijednosti, jer im je pojačanje jednako. Sistem drugog reda ima brži prelazni proces, jer je treći pol zanemaren. Odnosno, dodatni polovi usporavaju odziv, ali i smanjuju preksok.

```
>> s=tf('s');
>> W1=5/(s+1)/(s+2)/(s+3)
>> G1=feedback(W1,1); pole(G1)
>> W2=10/(s+1)/(s+2)/(s+3)
>> G2=feedback(W2,1); pole(G2)
>> sd1=-0.8455 + 1.7316i
>> G2a=10/16/[(-s/sd1+1)*(-s/sd1'+1)]
>> step(G2), hold on, step(G2a,'r-')
```

Uticaj dodatnih nula

Dodatne nule ne utiču na prirodu odziva (aperiodičnost, ocilatornost), ali utiču na karakteristične veličine (amplitudu, vrijeme smirenja, preskok, itd.). Neka je funkcija prenosa sistema:

$$G(s) = \frac{s+a}{s^2 + as + b^2} = (s+a)\frac{1}{s^2 + as + b^2}.$$

Odziv sistema u s domenu se može zapisati kao odziv sistema drugog reda pomnožen sa faktorom $s+a$:

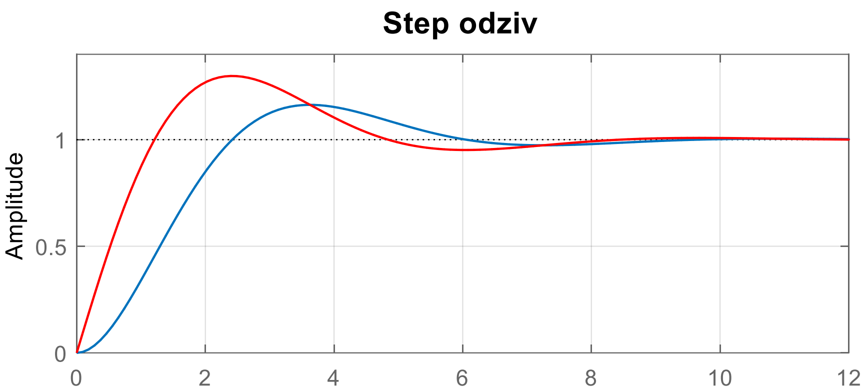
$$Y(s) = X(\mathrm{s})G(s) = (s+a)\frac{X(s)}{s^2 + as + b^2} = (s+a)Y_1(s).$$

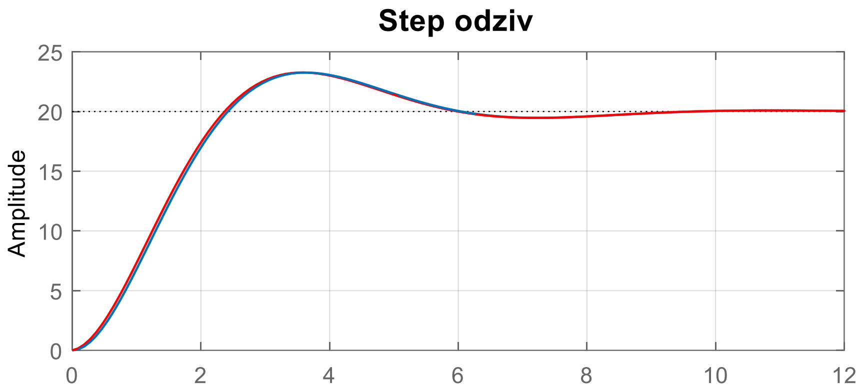
U vremenskom domenu odziv sistema predstavlja zbir dvije komponente: odziva sistema drugog reda $y_1(t)$ skaliranog sa a i izvoda te komponente (množenje sa s). Ukoliko je a mnogo veliko, komponenta izvoda se može zanemariti, te se može smatrati da nula samo skalira odziv drugog reda.

Uticaj dodatnih nula

Posmatrajmo funkcije prenosa i njihove step odzive:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \quad G_{11}(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} \quad G_2(s) = \frac{20}{s^2+s+1} \quad G_{22}(s) = \frac{s+20}{s^2+s+1}$$





Nule generalno ubrzavaju odziv (skraćuju vrijeme uspona), ali povećavaju preskok, što se može vidjeti sa prve slike. Na drugoj slici se uticaj nule može zanemariti, jer je koeficijent a veliki.

```
>> s=tf('s');
>> G1=1/(s^2+s+1)
>> G11=(s+1)/(s^2+s+1)
>> step(G1), hold on, step(G11,'r')
>> G2=20/(s^2+s+1)
>> G22=(s+20)/(s^2+s+1)
>> step(G2), hold on, step(G22,'r')
```